УДК 517.518.86

В. В. Арестов

НЕРАВЕНСТВА БЕРНШТЕЙНА И СЕГЕ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ*

В работе дан обзор результатов, относящихся к точным неравенствам Бернштейна и Сеге для тригонометрических полиномов (на вещественной оси, а точнее, на периоде) и некоторым более общим неравенствам для тригонометрических полиномов и алгебраических многочленов на единичном круге комплексной плоскости; все эти неравенства можно интерпретировать как вычисление или оценки норм линейных операторов на множестве полиномов. Обозначенная тематика весьма обширна; отбор материала существенно отражает интересы автора. Наибольшее внимание уделено точным неравенствам в пространствах L_p при $0 \leqslant p < 1$. Обсуждаются также классические неравенства для тригонометрических полиномов относительно функционалов типа φ-нормы для двух важных классов функций φ.

1. Классические варианты неравенств

1.1. Символом $\mathbb{P}$ будем обозначать поле $\mathbb{C}$ комплексных или поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Пусть $C = C(\mathbb{P})$ есть пространство непрерывных 2π-периодических функций со значениями в поле $\mathbb{P}$; это есть банахово пространство относительно равномерной нормы $\|f\|_C = \max\{|f(t)| : \ t \in [0, 2\pi]\}$. Обозначим через $\mathcal{T}_n(\mathbb{P})$ множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1}$$

порядка n с коэффициентами из поля $\mathbb{P}$. Во множестве $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ выполняется известное и часто используемое неравенство Бернштейна

$$\|f_n'\|_C \leqslant n\|f_n\|_C, \quad f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}); \tag{2}$$

экстремальные полиномы неравенства (2) имеют вид $a\cos nt + b\sin nt$. С. Н. Бернштейн получил неравенство (2) для полиномов с вещественными коэффициентами [1, п. 10, с. 25–26]. Более того, в первоначальном варианте

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-01-00213, и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект № НШ-1071.2008.1).

[2] работы [1] С. Н. Бернштейн доказал это неравенство с константой n для нечетных и четных тригонометрических полиномов и, как следствие, с константой $2n$ – для полиномов общего вида (1). В авторских комментариях [3, п. 3.4, с. 527] С. Н. Бернштейна к работе [1] имеется следующая фраза: «Приведенный здесь (т. е. в [1, п. 10, с. 25–26]) вывод, показывающий, что общее неравенство является элементарным следствием того же неравенства для суммы синусов, сообщенный мне Э. Ландау вскоре после появления диссертации [2], впервые был опубликован в [4, с. 39]». Отметим, что работа [2] вышла в 1912, а монография [4] – в 1926 году.

В 1914 году М. Рисс [5] (см. также доказательство, к примеру, в [6, т. 2, гл. 10]) получил неравенство (2) с наилучшей константой n (как на множестве $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$, так и на множестве $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$) с помощью известной интерполяционной формулы М. Рисса для производной тригонометрического полинома. А именно, М. Рисс доказал такое утверждение.

Теорема 1.1. *Для производной произвольного тригонометрического полинома $f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ порядка $n \geqslant 1$ имеет место формула*

$$f_n'(t) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \alpha_k f_n(t+\tau_k), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{3}$$

в которой

$$\tau_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad \alpha_k = \frac{1}{n\left(2\sin\dfrac{\tau_k}{2}\right)^2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant 2n. \tag{4}$$

Для коэффициентов формулы (3) выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = n, \tag{5}$$

поэтому из формулы (3) следует неравенство (2) (с константой n).

На данный момент известно по крайней мере четыре доказательства неравенства Бернштейна: 1) доказательство С. Н. Бернштейна (с применением идеи Э. Ландау) для множества $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ [1, п. 10, с. 25–26; 7, отд. IV]; 2) доказательство М. Рисса для множества $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ [5; 6, т. 2, гл. 10], основанное на формуле (3); 3) доказательство С. Б. Стечкина для множества $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$, основанное на идее сравнения произвольного полинома с экстремальным полиномом; это доказательство приведено, например, в книге Н. К. Бари [8, с. 47–48], см. также И. К. Даугавета [9, гл. 2, § 6]; 4) доказательство автора [10, 11] для множества $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, основанное на иных соображениях. Для множества $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ самым простым является доказательство С. Б. Стечкина; для множества $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ – М. Рисса.

Условимся символом $\mathcal{T}_n$ обозначать любое из множеств $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ или $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, в том случае когда соответствующее утверждение справедливо для каждого из этих двух множеств.

Как следствие (2) при любом $r \geqslant 1$ имеет место точное неравенство

$$\|f_n^{(r)}\|_C \leqslant n^r \|f_n\|_C, \quad f_n \in \mathcal{T}_n; \tag{6}$$

и вновь экстремальные полиномы неравенства (6) имеют вид $a\cos nt + b\sin nt$.

1.2. В дальнейшем неравенства (2) и (6) обобщались в разных направлениях. В 1928 году Г. Сеге [12] доказал, что при любом вещественном α имеет место точное неравенство

$$\|\widetilde{f}_n' \cos\alpha + f_n' \sin\alpha\|_C \leqslant n\|f_n\|_C, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \tag{7}$$

в котором

$$\widetilde{f}_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(-b_k\cos kt + a_k \sin kt) \tag{8}$$

есть полином, сопряженный полиному f_n. Из этого неравенства, в частности, следует неравенство Бернштейна (2), (6) и неравенство

$$\|\widetilde{f}_n^{(r)}\|_C \leqslant n^r \|f_n\|_C, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \tag{9}$$

для производных порядка $r \geqslant 1$ сопряженного тригонометрического полинома.

А. Зигмунд в 1933 году [6, т. 2, гл. 10 (3.25)] доказал следующее утверждение. Если функция φ на полуоси $[0,\infty)$ выпуклая вниз и не убывает, то

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|\widetilde{f}_n'(t)\cos\alpha + f_n'(t)\sin\alpha|)\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi(n|f_n(t)|)\,dt, \quad f_n \in \mathcal{T}_n. \tag{10}$$

Взяв $\varphi(u) = u^p,\ p \geqslant 1$, получаем неравенство

$$\|\widetilde{f}_n' \cos\alpha + f_n' \sin\alpha\|_{L_p} \leqslant n\|f_n\|_{L_p}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \tag{11}$$

в пространстве L_p с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}. \tag{12}$$

Из (11) следует, что для любого натурального r и $1 \leqslant p < \infty$ справедливы неравенства

$$\|f_n^{(r)}\|_{L_p} \leqslant n^r \|f_n\|_{L_p}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \tag{13}$$

$$\|\widetilde{f}_n^{(r)}\|_{L_p} \leqslant n^r \|f_n\|_{L_p}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n. \tag{14}$$

Все приведенные выше неравенства точные и обращаются в равенства на полиномах $f_n(t) = a\cos nt + b\sin nt$.

Неравенства (7)–(11) являются следствием интерполяционной формулы, аналогичной формуле Рисса (3), полученной Г. Сеге. А именно, Г. Сеге доказал [12] следующее утверждение (см. также доказательство в [6, т. 2, гл. 10, п. 3]).

Теорема 1.2. *При любом вещественном α для произвольного тригонометрического полинома $f_n \in \mathcal{T}_n$ порядка $n \geqslant 1$ имеет место формула*

$$\widetilde{f}_n'(t)\cos\alpha + f_n'(t)\sin\alpha = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \beta_k f_n(t + \tau_k), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{15}$$

в которой

$$\tau_k = \tau_k(\alpha) = \frac{k}{n}\pi + \frac{\alpha}{n}, \quad \beta_k = \beta_k(\alpha) = \frac{1 - (-1)^k \cos\alpha}{4n\left(\sin\dfrac{\tau_k}{2}\right)^2}. \tag{16}$$

Для коэффициентов формулы (15) имеет место равенство $\sum\limits_{k=1}^{2n} |\beta_k| = n$, поэтому из формулы (15) следуют неравенства (7)–(11).

1.3. Г. Сеге [12] на множестве тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ с вещественными коэффициентами доказал более общее в сравнении с (7) утверждение. С помощью (вещественного) тригонометрического полинома

$$\varphi(t) = \lambda_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \cos kt \tag{17}$$

и вещественного параметра α на множестве $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов (1) определим оператор Θ_n формулой

$$\Theta_n f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n-k} [a_k \cos(kt + \alpha) + b_k \sin(kt + \alpha)]. \tag{18}$$

Теорема 1.3. *Если полином (17) является неотрицательным:*

$$\varphi(t) \geqslant 0, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{19}$$

то для вещественного α во множестве $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ имеет место (точное) неравенство

$$\|\Theta_n f_n\|_C \leqslant \lambda_0 \|f_n\|_C, \quad f_n \in \mathcal{T}_n. \tag{20}$$

Оператор $\widetilde{f}_n' \cos\alpha + f_n' \sin\alpha$ есть частный случай (18) при $\lambda_k = n - k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. В этом случае полином (17) имеет вид

$$\varphi(t) = n + 2\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\cos kt = 2nF_{n-1}(t),$$

где

$$F_{n-1}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \cos kt$$

есть ядро Фейера, которое, как известно, неотрицательное. Поэтому неравенство (20) содержит неравенство (6) (для множества $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$).

С. Н. Бернштейн в работе [13] 1935 года получил более общее утверждение в сравнении с теоремой 1.3 Г. Сеге. Рассмотрим вещественный тригонометрический полином

$$\psi(t) = \lambda_0 + \lambda_n \cos nt + 2\sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k \cos kt - \mu_k \sin kt). \tag{21}$$

С помощью этого полинома и вещественного параметра α на множестве $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ тригонометрических полиномов (1) (с вещественными коэффициентами) определим оператор $\Theta = \Theta_n$ формулой

$$\Theta_n f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left\{\lambda_{n-k} A_{k,\alpha}(t) - \mu_{n-k} B_{k,\alpha}(t)\right\}, \tag{22}$$

здесь $\mu_0 = \mu_n = 0$,

$$A_{k,\alpha}(t) = a_k \cos(kt + \alpha) + b_k \sin(kt + \alpha),$$
$$B_{k,\alpha}(t) = -b_k \cos(kt + \alpha) + a_k \sin(kt + \alpha).$$

Теорема 1.4. *Для того чтобы для оператора (22) во множестве $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ имело место неравенство*

$$\|\Theta_n f_n\|_C \leqslant \lambda_0 \|f_n\|_C, \quad f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R}), \tag{23}$$

необходимо и достаточно, чтобы для полинома (21) *выполнялось следующее условие неотрицательности:*

$$\psi(t_k) \geqslant 0, \quad t_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 2n-1. \tag{24}$$

1.4. Теоремы 1.1 и 1.2 дают решение еще по крайней мере двух экстремальных задач для полиномов. Обсудим эти вопросы для формулы М. Рисса (3) и только на множестве полиномов с вещественными коэффициентами.

1) Для пространства $C = C(\mathbb{R})$ сопряженное пространство C^* можно отождествить с пространством V (вещественнозначных) функций μ ограниченной вариации $\bigvee \mu = \bigvee_0^{2\pi} \mu$ на отрезке $[0, 2\pi]$, непрерывных слева в каждой точке полуинтервала $(0, 2\pi]$. При этом каждый функционал $y^* \in C^*$ представляется в виде

$$\langle y^*, f \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\, d\mu(t), \quad f \in C,$$

где $\mu \in V$, причем

$$\|y^*\|_{C^*} = \bigvee_0^{2\pi} \mu.$$

Перепишем неравенство (2) (на множестве $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$) в следующей эквивалентной форме:

$$|f_n'(0)| \leqslant n\|f_n\|_C, \quad f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R}); \tag{25}$$

неравенство (25) – точное и обращается в равенство лишь на полиномах $f_n(t) = a\sin nx$. Этот результат означает, что норма (линейного) функционала $f'(0)$ производной в точке 0 на подпространстве $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ пространства $C(\mathbb{R})$ равна n. В силу (3) имеет место формула М. Рисса

$$f_n'(0) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \alpha_k f_n(\tau_k), \quad f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R}), \tag{26}$$

для коэффициентов которой справедливо соотношение (5). Формулу (26) можно записать в виде

$$f_n'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_n(u)\, dM_n(u), \quad f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R}), \tag{27}$$

где M_n есть кусочно постоянная функция, разрывы которой сосредоточены в точках τ_k, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, и, более того, $M_n(\tau_k) - M_n(\tau_k - 0) = (-1)^k \alpha_k \pi$. Формулу (26) (или, то же самое, (27)) можно интерпретировать как конструкцию продолжения функционала производной $f'(0)$ с подпространства $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ на все пространство $C(\mathbb{R})$ с сохранением нормы.

2) Для тригонометрических полиномов имеет место представление

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_n(u)\mathcal{D}_n(u+t)du, \quad f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R}), \tag{28}$$

где

$$\mathcal{D}_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$$

есть ядро Дирихле. Отсюда следует формула

$$f_n'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_n(u)\mathcal{D}_n'(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_n(u)\,d\mathcal{D}_n(u), \quad f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R}). \tag{29}$$

Обозначим через $\mathcal{T}_n^{\perp}$ множество функций $\mu \in V$, «ортогональных» пространству $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$, т. е. обладающих свойством

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_n(u)\,d\mu(u) = 0 \quad \forall\ f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R}). \tag{30}$$

Для любого элемента $\mu \in \mathcal{T}_n^{\perp}$ наряду с (29) имеет место формула

$$f_n'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_n(u)\,d(\mathcal{D}_n(u) - \mu(u)), \quad f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R}). \tag{31}$$

А следовательно, справедливо неравенство

$$|f_n'(0)| \leqslant \frac{1}{\pi}\,\|f_n\|_C \bigvee_0^{2\pi}(\mathcal{D}_n - \mu), \quad \mu \in \mathcal{T}_n^{\perp}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R}). \tag{32}$$

Рассмотрим величину

$$\omega_n(\mathcal{D}_n; \mathcal{T}_n^{\perp}) = \inf\left\{\bigvee_0^{2\pi}(\mathcal{D}_n - \mu) :\ \mu \in \mathcal{T}_n^{\perp}\right\} \tag{33}$$

наилучшего приближения ядра Дирихле множеством $\mathcal{T}_n^{\perp}$ по вариации. Поскольку неравенство (25) точное, то имеет место оценка $\omega_n(\mathcal{D}_n; \mathcal{T}_n^{\perp}) \geqslant \pi n$. Следуя идеям работ Л. В. Тайкова [14, 15], нетрудно показать, что на самом деле имеет место равенство

$$\omega_n(\mathcal{D}_n; \mathcal{T}_n^{\perp}) = \pi n, \quad n \geqslant 1; \tag{34}$$

более того, разность $\mu_n = \mathcal{D}_n - M_n$ принадлежит классу $\mathcal{T}_n^{\perp}$ и именно эта функция решает задачу (33), т. е. дает нижнюю грань в (33).

2. Неравенства Бернштейна и Сеге в пространствах L_p при $0 \leqslant p < 1$

Функционал $\|\cdot\|_p$ в дальнейшем будет рассматриваться при $0 \leqslant p \leqslant \infty$. В случае $0 < p < \infty$ считаем, что он определен формулой (11). Для крайних значений p полагаем

$$\|f\|_{L_\infty} = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_{L_p} = \|f\|_C = \max\{|f(t)|:\ t\in[0,2\pi]\}, \tag{35}$$

$$\|f\|_{L_0} = \lim_{p\to+0} \|f\|_{L_p} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(t)|dt\right). \tag{36}$$

В 1975 году В. И. Иванов [16], Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд [17] при исследовании прямых и обратных теорем теории приближения в пространствах L_p, $0 < p < 1$, доказали, что при каждом p существует константа $c(p)$ такая, что имеет место неравенство

$$\|f_n^{(r)}\|_{L_p} \leqslant c(p) n^r \|f_n\|_{L_p}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n; \tag{37}$$

причем при $p \to +0$ константа $c(p)$ ведет себя по p как $(1/p)^{1/p}$. После этих работ последовал ряд результатов по уточнению константы $c(p)$. Так, в работе [18] А. Мате и П. Неваи 1980 года было, в частности, доказано, что в (37) можно взять $c(p) = (11)^{1/p}$.

В 1979 году В. В. Арестов [10] (подробное доказательство см. [11]) доказал, что при всех p, $0 \leqslant p < 1$, в неравенстве (37) константа $c(p)$ равна единице и, значит, неравенство (13) имеет место при всех $p \geqslant 0$. Итак, справедлива

Теорема 2.1. *При любых $0 \leqslant p \leqslant \infty$ и целых $n \geqslant 1$, $r \geqslant 0$ во множестве $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ имеет место неравенство*

$$\|f_n^{(r)}\|_{L_p} \leqslant n^r \|f_n\|_{L_p}, \quad f \in \mathcal{T}_n. \tag{38}$$

На полиномах $a\cos nt + b\sin nt$ это неравенство обращается в равенство; более того, если $0 < p \leqslant \infty$, то других экстремальных полиномов нет.

Относительно неравенства (14) подобное утверждение уже не имеет места. Обозначим через $K_p(n,r)$ наименьшую константу в неравенстве

$$\|\widetilde{f}_n^{(r)}\|_{L_p} \leqslant K_p(n,r) \|f_n\|_{L_p}, \quad f \in \mathcal{T}_n. \tag{39}$$

Приведенные выше результаты Г. Сеге и А. Зигмунда означают, что

$$K_p(n,r) = n^r \quad \text{для} \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Приводимые ниже в этом пункте результаты доказаны в работе В. В. Арестова [19].

Теорема 2.2. *При любых $0 \leqslant p \leqslant \infty$ и целых $n \geqslant 0$, $r \geqslant 0$ имеют место неравенства*
$$n^r \leqslant K_p(n,r) \leqslant K_0(n,r). \tag{40}$$

Последнее неравенство означает, что константа $K_p(n,r)$, как функция параметра p, является наибольшей при $p = 0$.

Теорема 2.3. *При всех целых $n \geqslant 0$, $r \geqslant 0$ для $p = 0$ полином*
$$h_n(t) = 2^n(1+\cos t)^n$$
является экстремальным в неравенстве (39) *и, как следствие,*
$$K_0(n,r) = \|\widetilde{h}_n^{(r)}\|_{L_0}.$$

Теорема 2.4. *Если $r \geqslant n \ln 2n$, то*
$$K_p(n,r) = n^r \tag{41}$$
при всех $p \geqslant 0$.

Равенство (41) при всех $p \geqslant 0$ справедливо в том и только в том случае, если оно имеет место при $p = 0$. Условие $r \geqslant n \ln 2n$ является лишь достаточным для того, чтобы $K_0(n,r) = n^r$. Это равенство выполняется в том и только в том случае, если все $2n$ нулей конкретного полинома $\widetilde{h}_n^{(r)}$ вещественные. У автора есть гипотеза, что для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $r \geqslant n-1$.

Теорема 2.5. *Для фиксированного r при $n \to \infty$ справедливо соотношение*
$$K_0(n,r) = 4^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_n = n + o(n). \tag{42}$$

Таким образом, $K_0(n,r)$ по n при фиксированном r растет существенно быстрее, чем $K_p(n,r) = n^r$ для $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

3. Неравенства для алгебраических многочленов на единичном круге комплексной плоскости

3.1. Приведенные выше неравенства для тригонометрических полиномов можно переписать в виде соответствующих неравенств во множестве алгебраических многочленов на единичном круге (а точнее, на единичной окружности) комплексной плоскости. Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов P_n степени n с комплексными коэффициентами, которые нам удобно здесь записывать в виде

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k z^k. \tag{43}$$

Многие из приведенных выше утверждений являются следствием результатов автора [11, 21] для композиции Сеге алгебраических многочленов. Композицией Сеге многочлена

$$\Lambda_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_k z^k \tag{44}$$

и многочлена (43) называют многочлен

$$\Lambda_n P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_k c_k z^k; \tag{45}$$

свойствам этой операции посвящено много работ (см. [7, т. 2, отд. 5; 22, гл. 4] и приведенную там библиографию). При фиксированном Λ_n формулой (45) определен линейный оператор в $\mathcal{P}_n$; этот оператор мы будем обозначать тем же символом Λ_n, что и многочлен (44).

Пусть Φ^+ есть множество функций φ, определенных, неубывающих на полуоси $(0, \infty)$, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке, лежащем в $(0, \infty)$, и обладающих тем свойством, что $u\varphi'(u)$ также не убывает. Перечисленным условиям удовлетворяют, к примеру, функции $\ln u$, u^p для $0 < p < \infty$. В работе автора [21] доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для любой функции $\varphi \in \Phi^+$ и любых двух многочленов $\Lambda_n, P_n \in \mathcal{P}_n$ имеет место неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|(\Lambda_n P_n)(e^{it})|)dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi(\|\Lambda_n\|_0 |P_n(e^{it})|)dt. \tag{46}$$

Пусть $\mathcal{P}_n^0$ есть множество многочленов из $\mathcal{P}_n$, все n корней которых лежат в замкнутом единичном круге $|z| \leqslant 1$, $\mathcal{P}_n^\infty$ – множество многочленов из $\mathcal{P}_n$, у которых нет нулей в круге $|z| < 1$ и $\mathcal{P}_n^1 = \mathcal{P}_n^0 \cap \mathcal{P}_n^\infty$ – множество многочленов, у которых все n нулей лежат на единичной окружности. Из известной формулы Иенсена для мероморфных функций (см., например, [7, т. 1, отд. 3, теорема 175]) следует, что если $\Lambda_n \in \mathcal{P}_n^0$, то $\|\Lambda_n\|_0 = |\lambda_n|$, а если $\Lambda_n \in \mathcal{P}_n^\infty$, то $\|\Lambda_n\|_0 = |\lambda_0|$. Поэтому следующее утверждение содержится в теореме 3.1, хотя по времени оно было получено ранее [11].

Теорема 3.2. *Если $\Lambda_n \in \mathcal{P}_n^0$ или $\Lambda_n \in \mathcal{P}_n^\infty$, то для любой функции $\varphi \in \Phi^+$ в $\mathcal{P}_n$ имеет место точное неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|(\Lambda_n P_n)(e^{it})|)dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi(N(\Lambda_n)|P_n(e^{it})|)dt, \quad P_n \in \mathcal{P}_n, \tag{47}$$

с константой

$$N(\Lambda_n) = \max(|\lambda_0|, |\lambda_n|).$$

В соответствии с тем, какому из следующих условий удовлетворяет оператор Λ_n

$$\Lambda_n \in \mathcal{P}_n^0, \quad \Lambda_n \in \mathcal{P}_n^\infty, \quad \Lambda_n \in \mathcal{P}_n^1 = \mathcal{P}_n^0 \cap \mathcal{P}_n^\infty, \tag{48}$$

на многочленах

$$az^n, \quad b, \quad az^n + b, \tag{49}$$

a, $b \in \mathbb{C}$, неравенство (47) обращается в равенство.

В [11] было доказано, что при определенных, дополнительных ограничениях на φ и Λ_n экстремальными в (47) являются лишь многочлены (49).

Для функции $\varphi(u) = \ln u \in \Phi^+$ неравенство (46) можно записать в виде

$$||\Lambda_n P_n||_0 \leqslant ||\Lambda_n||_0 ||P_n||_0; \tag{50}$$

в несколько иной форме оно было приведено ранее в [23, теорема 7]. Легко проверить, что на многочлене $\pi_n(z) = (1+z)^n$ неравенство (50) обращается в равенство.

При фиксированном Λ_n обозначим через $N_p(\Lambda_n)$, $0 \leqslant p \leqslant \infty$, наименьшую константу в неравенстве

$$||\Lambda_n P_n||_p \leqslant N_p(\Lambda_n) ||P_n||_p, \quad P_n \in \mathcal{P}_n. \tag{51}$$

Как только что было отмечено,

$$N_0(\Lambda_n) = ||\Lambda_n||_0.$$

В силу теоремы 3.1 справедлива оценка

$$N_p(\Lambda_n) \leqslant N_0(\Lambda_n) = ||\Lambda_n||_0, \quad 0 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Для сравнения напомним хорошо известный факт, что

$$N_p(\Lambda_n) \leqslant N_\infty(\Lambda_n), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

В условиях теоремы 3.2 на полином Λ_n выполняется равенство

$$N_p(\Lambda_n) = \max(|\lambda_0|, |\lambda_n|) \tag{52}$$

при всех значениях p, $0 \leqslant p \leqslant \infty$.

3.2. Тригонометрический полином $f_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ представляется в виде $f_n(t) = \zeta^{-n}P(\zeta)$, $\zeta = e^{it}$, $P \in \mathcal{P}_{2n}$. Поэтому экстремальные задачи для тригонометрических полиномов порядка n на оси (периоде) можно записать в виде соответствующих задач для алгебраических полиномов порядка $2n$ в круге $|z| \leqslant 1$. Операции дифференцирования в $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ будет соответствовать в $\mathcal{P}_{2n}$ операция $\Delta P(z) = zP'(z) - nP(z)$, т. е. операция

$$\Delta P(z) = zP'(z) - \frac{n}{2}\,P(z)$$

во множестве многочленов $\mathcal{P}_n$ порядка n.

Для $\alpha \in \mathbb{C}$ на множестве $\mathcal{P}_n$ многочленов (43) рассмотрим более общий оператор

$$\Delta_\alpha P(z) = zP'(z) - \alpha P(z) = \sum_{k=0}^{n}(k-\alpha)\binom{n}{k}c_k z^k. \tag{53}$$

Этот оператор является композицией Сеге (45), которая определена многочленом

$$\Delta_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-\alpha)z^k = (z+1)^{n-1}((n-\alpha)z-\alpha). \tag{54}$$

Последняя формула, в частности, показывает, что оператор (53) удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Как частный случай этой теоремы, справедливо следующее утверждение [11, следствие 6].

Теорема 3.3. *Пусть $\varphi \in \Phi^+$. Тогда при любых $n \geqslant 1$ и $r \geqslant 1$ во множестве $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ тригонометрических полиномов порядка n имеет место точное неравенство*

$$\int_0^{2\pi}\varphi(|f_n^{(r)}(t)|)dt \leqslant \int_0^{2\pi}\varphi(n^r|f_n(t)|)dt. \tag{55}$$

Полиномы $ae^{int} + be^{-int}$ для произвольных комплексных a, b обращают это неравенство в равенство; если функция $u\varphi'(u)$ (строго) возрастает на числовой оси, то других экстремальных полиномов нет.

Утверждения теоремы 2.1 содержатся в последней теореме. Оператору $\widetilde{f}_n^{(r)}$ дифференцирования сопряженного тригонометрического полинома также соответствует композиция Сеге во множестве $\mathcal{P}_{2n}$ алгебраических многочленов. Однако порождающий эту композицию многочлен Λ_{2n} в общем случае уже не удовлетворяет условиям теоремы 3.2, а точнее, нули многочлена Λ_{2n} могут лежать как внутри, так и вне единичного круга. Именно этот факт является причиной того, что, как видно из результатов предыдущего параграфа, в пространствах L_p при $0 \leqslant p < 1$ ситуация с неравенством Сеге существенно сложнее в сравнении с неравенством Бернштейна; более подробно см. работу автора [19].

4. Неравенства относительно φ-метрик с неубывающими функциями φ

В этом параграфе через Λ_n будем обозначать (произвольный) линейный оператор во множестве $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка $n \geqslant 0$ с вещественными или комплексными коэффициентами, норма которого на множестве $\mathcal{T}_n$ с нормой пространства C равна единице. Таковыми, в частности, являются оператор дифференцирования

$$(D_n f_n)(t) = \frac{f_n'(t)}{n} \tag{56}$$

и оператор

$$(G_n f_n)(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt, \tag{57}$$

который полиному (1) сопоставляет его старшую гармонику.

Для функции φ с достаточно хорошими свойствами на полуоси $(0, +\infty)$ обозначим через $c_n(\Lambda_n, \varphi)$ наилучшую (наименьшую) константу в неравенстве

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\left|\left(\Lambda_n f_n\right)(t)\right|\right) dt \leqslant c_n(\Lambda_n, \varphi) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(|f_n(t)|\right) dt, \quad f_n \in \mathcal{T}_n. \tag{58}$$

Неравенство (58) для функций $\varphi \in \Phi^+$ изучалось в работе [11] и обсуждалось в двух предыдущих параграфах. В частности, в [11] доказано, что $c_n(G_n, \varphi) = 1$ для любой функции $\varphi \in \Phi^+$. Последний результат означает, что для любой функции $\varphi \in \Phi^+$ относительно функционала $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(|f(t)|\right) dt$ гармоника $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ младшими гармониками не приближается; этот факт был давно и хорошо известен в пространствах $L_p,\ 0 < p \leqslant \infty$.

Пусть Φ есть множество функций φ, неотрицательных и неубывающих на полуоси $[0, \infty)$. Исследование константы $c_n(\Lambda_n, \varphi)$ для конкретных функций $\varphi \in \Phi$ (уже для операторов (56) и (57)) является весьма трудной задачей. Представляет интерес наибольшая из таких констант, т. е. величина

$$c_n(\Lambda_n) = \sup\{c_n(\Lambda_n, \varphi) :\ \varphi \in \Phi\}. \tag{59}$$

Рассмотрим конкретную функцию $\varphi^*(t) = 0,\ 0 \leqslant t < 1;\ \varphi^*(t) = 1,\ t \geqslant 1$. Имеем $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*\left(|f_n(t)|\right) dt = \mu(f_n)$, где $\mu(f_n)$ есть мера (Лебега) множества точек периода, в которых модуль полинома f_n больше или равен 1:

$$\mu(f_n) = \operatorname{mes} E(f_n), \quad E(f_n) = \{t \in [-\pi, \pi] :\ |f_n(t)| \geqslant 1\}.$$

Поэтому неравенство (58) для функции φ^* принимает вид

$$\mu(\Lambda_n f_n) \leqslant c_n(\Lambda_n, \varphi^*)\mu(f_n), \quad f_n \in \mathcal{T}_n. \tag{60}$$

Поскольку функция φ^* принадлежит классу Φ, то имеет место неравенство $c_n(\Lambda_n, \varphi^*) \leqslant c_n(\Lambda_n)$. На самом же деле две последние величины совпадают [24].

Лемма. *При любом $n \geqslant 0$ для любого линейного оператора Λ_n имеет место равенство* $\sup\{c_n(\Lambda_n, \varphi) : \varphi \in \Phi\} = c_n(\Lambda_n, \varphi^*)$, *т. е. в задаче* (59) *верхняя грань достигается именно на функции φ^*.*

Неравенство (60) изучал А. Г. Бабенко [20] в 1992 году. В частности, он доказал, что для оператора G_n константа $\alpha_n = c_n(G_n, \varphi^*)$ удовлетворяет неравенствам $\sqrt{2n} \leqslant \alpha_n \leqslant n\sqrt{2}$.

Более тонкую, в сравнении с (60), задачу изучали А. С. Менделев и М. С. Плотников. Для $y \geqslant 1$ положим

$$\sigma_n(y) = \inf\{m(f_{n-1}) : \ f_{n-1} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})\}, \tag{61}$$

$$m(f_{n-1}) = \operatorname{mes}\{t \in [0, 2\pi] : \ |y\cos nt + f_{n-1}(t)| \geqslant 1\}.$$

А. С. Менделев [25] анонсировал в 2000 году, что при любом $y \geqslant 1$ имеет место формула

$$\sigma_n(y) = 4\arccos\frac{1}{y^{1/2n}}. \tag{62}$$

Ранее эта формула была получена при больших значениях y в совместной курсовой работе А. С. Менделева и М. С. Плотникова. Из формулы (62), в частности, следует, что для наилучшей константы в неравенстве (60) имеет место равенство

$$\alpha_n = \sqrt{2n}, \quad n \geqslant 1. \tag{63}$$

Равенство (63) и приведенная выше лемма влекут следующее утверждение [24].

Теорема 4.1. *При $n \geqslant 1$ имеют место равенства*

$$c_n(G_n) = \alpha_n = \sqrt{2n}.$$

Для оператора дифференцирования D_n неравенство (58) называют неравенством Бернштейна. В работе [11] доказано, что $c_n(D_n, \varphi) = 1$ для любой функции $\varphi \in \Phi^+$. В частности, при любом $p \geqslant 0$ на множестве $\mathcal{T}_n$ имеет место точное неравенство Бернштейна $\|f_n'\|_{L_p} \leqslant n\|f_n\|_{L_p}$. Ни для одной функции $\varphi \in \Phi$, не принадлежащей классу Φ^+, точное значение или хотя бы хорошие оценки константы $c_n(D_n,\varphi)$ в настоящее время неизвестны. Конечно, представляет интерес наибольшая из констант $c_n(D_n) = \sup\{c_n(D_n,\varphi) :\ \varphi \in \Phi\}$. Используя результаты работы [20], можно лишь сделать вывод, что справедливы оценки

$$\frac{2}{\pi}\ln(2n+1) \leqslant c_n(D_n) \leqslant 2n.$$

Литература

1. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1. С. 11–104.
2. Bernstein S. Sur l'ordre de la mailleure approximation des fonctions continues par des polynômesde degré donné // Mémoires de l'Académie Royale de Belgique (2) 4 (1912), 1–103.
3. Бернштейн С. Н. Авторские комментарии // Собр. соч. Т. 1. С. 526–562.
4. Bernstein S. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réele. P.: Gauthier-Villars, 1926.
5. Riesz M. Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome // Deutsche Mat. Ver. 1914. H. 23. S. 354–368.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1, 2.
7. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. 1, 2.
8. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
9. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
10. Арестов В. В. О неравенствах С. Н. Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1289–1292.
11. Арестов В. В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
12. Szegö G. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schriften d. Königsberg Gelehrten Ges., Natur-wiss.-Kl. 1928. Jg. 5, H. 4. S. 59–70.
13. Бернштейн С. Н. Об одной теореме Сеге // Собр. соч. Т. 1. С. 173–177.
14. Тайков Л. В. Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи матем. наук. 1965. Т. 20, № 3. С. 205–211.
15. Тайков Л. В. О наилучшем приближении ядер Дирихле // Матем. заметки. 1993. Т. 53, № 6. С. 116–121.
16. Иванов В. И. Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 489–498.

17. Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сб. 1975. Т. 98, № 140. С. 395–415.

18. Mate A., Nevai P. G. Bernsten's inequality in L_p for $0 < p < 1$ and $(C, 1)$ bounds for ortogonal polynomials // Ann. Math. (2). 1980. Vol. 111, № 1. P. 145–154.

19. Арестов В. В. Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Матем. заметки. 1994. Т. 56, № 6. С. 10–26.

20. Бабенко А. Г. Неравенства слабого типа для тригонометрических полиномов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 34–41.

21. Арестов В. В. Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 7–18.

22. Marden M. The geometry of the zeros of a polynomials in a complex variable. N. Y.: Amer. Math. Soc., 1949. (Math. Survey, № 3.)

23. De Bruijn N. G., Springer T. A. On the zeros of composition-polynomials // Akad. Wet. Amsterdam. 1947. Vol. 50. P. 895–903 (= Indag. Math. 1947. Vol. 9. P. 406–414).

24. Арестов В. В. Некоторые экстремальные задачи для тригонометрических полиномов относительно функционалов типа ϕ-нормы // Тр. Международ. летней матем. шк. С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 18–21.

25. Менделев А. С. Одна экстремальная задача для тригонометрических полиномов // Теория приближения функций и операторов: Тез. докл. Международ. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения С. Б. Стечкина. Екатеринбург: УрГУ, 2000. С. 103–104.

Статья поступила 05.01.2008 г.
Окончательный вариант 11.02.2008 г.